6/3/17

• Επανάληψη από Διαφορικές Εξισώσεις

• Θέλουμε η μεταβλητή μας να ανήκει σε διάστημα. Όχι ένωση διαστημάτων και ούτε μεμονωμένο σημείο.

• Η διαφορική εξίσωση αναφέρεται σε κάτι συνεχές (ενώ η εξισώσεις διαφορών σε κάτι διακριτό)

Παράδειγμα

1626 μ.Χ.

Έχουμε 24 \$ και τα βάζουμε σε τράπεζα με επιτόκιο 1,75%/τρίμηνο.

Τι ποσό έχουμε σήμερα?

Λύση

Έστω t: αριθμός τριμήνων, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (διακριτή μεταβλητή)

$y(t)$: ποσό μετά από t τρίμηνα

$$\Rightarrow y(0) = 24 \$$$

$$\left. \begin{aligned} y(t+1) &= y(t) + 0{,}075 \cdot y(t) \\ &= 1{,}0175\, y(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{αναδρομικός τύπος ακολουθίας}$$

Υπάρχουν 2 τύποι ακολουθίας:

1) Αναλυτικός
2) Αναδρομικός

$$y(1) = 1{,}075\, y(0)$$
$$y(2) = 1{,}075\, y(1)$$
$$y(3) = 1{,}075\, y(2)$$
$$\vdots$$
$$y(t) = 1{,}075\, y(t-1) \quad \rightarrow \text{Πολλαπλασιάζω κατά μέλη}$$

$$y(t) = (1{,}075)^t \cdot y(0)$$

Άρα ο αναλυτικός τύπος είναι $y(t) = (1,075)^{t} \cdot 24$

Υπολογίζουμε βήματα:

$$\begin{array}{r} 2017 \\ -\,1626 \\ \hline 391 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 1564 \end{array}$$

(υποθέτοντας ότι τα έβαλε 1/1)

$y(1564) = (1,0175)^{1564} \cdot 24 \simeq 14,6$ τρισ \$

Παράδειγμα

Η μείωση της μάζας μιας ραδιενεργούς ουσίας είναι ανάλογη της μάζας που υπήρχε αρχικά. Αν ο χρόνος ημίσειας* ζωής του ραδίου είναι 1600 χρόνια να βρ. μια συνάρτηση που να μας δίνει τη μάζα του ραδίου συναρτήσει του χρόνου.

*δηλ. ότι χάνει (η μισή από την ουσία) τη ραδιενέργειά της.

Λύση

$m(t)$: η μάζα του ραδίου μετά από t χρόνια

Το ότι χάνει είναι ανάλογο στα μαθηματικά το παριστάνουμε με την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Άρα

Θα βρω χάνει που παριστάται με τη σχέση $(-k)m(t)$, $k>0$

$m(t+1) - m(t) = (-k)\, m(t)$

ακολουθία ως προς t $\quad m(t+1) = (1-k)\, m(t)$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k>0$

Αναδρομικός τύπος.
Εμείς θα βρούμε τώρα αναλυτικό.

$$m(1) = (1-k)\,m(0)$$
$$m(2) = (1-k)\,m(1)$$
$$\vdots$$
$$① \quad \underline{m(t) = (1-k)\,m(t-1)}$$

$$m(t) = (1-k)^t\,m(0)$$

Έχουμε ότι $m(1600) = \frac{1}{2}\,m(0)$

$$(1-k)^{1600}\,m(0) = \frac{1}{2}\,m(0) \Rightarrow (1-k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$$

Άρα $m(t) = m(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{1/1600}$

Αν αλλάξουμε την μονάδα μέτρησης δεν αλλάζει ο συλλογισμός
θα αλλάξει μόνο στο κλάσμα της ανεκκαθάρισης

<u>Παράδειγμα</u>

r: κόκκινες, g: πράσινες } Θέλω να $w(n,k)$, όπου w: ο αριθμός των περιπτώσεων στις οποίες έχω επιλέξει ακριβώς k κόκκινα σφαιρίδια, έχοντας συνολικά βγάλει από το σάκο n σφαιρίδια

Μας ενδιαφέρει η σειρά. Έχουμε επανατοποθέτηση

<u>Λύση</u>

R_1, R_2, G

πιθανές περιπτώσεις:

GG	GR_2
GR_1	R_2G
R_1G	R_1R_2
R_1R_1	R_2R_1
R_2R_2	

$w(2,0) = 1$ → 1 περίπτωση

↳ 0 κόκκινα

↳ 2 επαναλήψεις

$w(2,1) = 4$
$w(2,2) = 4$

Θα βρω το γενικό τύπο:

- $1^{η}$ περίπτωση:
  Στην ν-οστή επανάληψη, επιλέγω το k-κόκκινο σφαιρίδιο.
  $w(n-1,\ k-1)$
  $r\,w(n-1,\ k-1)$: όλες οι δυνατές περιπτώσεις με τις οποίες μπορώ να επιλέξω k-σφαιρίδια σε n-επαναλήψεις

- $2^{η}$ περίπτωση
  Στην ν-οστή επανάληψη επιλέγω πράσινο σφαιρίδιο.
  $w(n-1,\ k)$
  $g\,w(n-1,\ k)$: Οι τρόποι που μπορεί να γίνει το ζητούμενο.

Αυτές οι 2 περιπτώσεις καλύπτουν όλο το σύνολο των περιπτώσεων που μπορούσαμε να έχουμε

Τελικά

$$w(n,k) = r \cdot w(n-1,\ k-1) + g\,w(n-1,\ k) \longrightarrow \text{αναδρομικός τύπος}$$
$$\Downarrow$$
Μερική Εξίσωση Διαφορών

Αναλυτικός Τύπος: $w(n,k) = \binom{n}{k} r^{k} g^{n-k}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

Διωνυμικός Συντελεστής

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Παράδειγμα

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad z \in \mathbb{C} \quad \text{με } z = x + yi, \ x > 0$$

Η συνάρτηση Γ είναι η γενίκευση του παραγοντικού

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Ασκήσεις

1) Επενδύουμε 500€, σε τράπεζα με επιτόκιο 6% ετησίως. Το επιτόκιο δίνεται κάθε μήνα ($1/12$ από το 6%).

i) Τι ποσό θα έχουμε στην τράπεζα μετά από 10 χρόνια

ii) Μετά από πόσο χρονικό διάστημα θα διπλασιάσουμε το ποσό.

2) Ο πληθυσμός μιας πόλης στο τέλος κάθε χρονιάς είναι ανάλογος του πληθυσμού που υπήρχε στην αρχή της χρονιάς. Αν ο πληθυσμός της πόλης το 2000 ήταν 50.000 και το 2010, 75.000. Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της πόλης το 2030?

3) Το 1517 κάποιος αγόρασε κάτι για 4.000 χρυσά νομίσματα, που αντιστοιχούν σε 492 ουγκιές χρυσού. Αν οι 492 είχαν επενδυθεί σε τράπεζα με επιτόκιο 3%, πόσες ουγκιές χρυσού θα υπήρχαν το 2016 στην τράπεζα.

4) Να αποδείξετε ότι τα $y(t)$ είναι λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων:

a) $y(t+1) - 2y(t) = 1$, $y(t) = A2^t - 1$

b) $y(t+1) - y(t) = t+1$, $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + A$

με $A \in \mathbb{R}$

Προβλήματα Αρχικών Τιμών 13/3/17

Παράδειγμα

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , t \in J = [a,b] \to \text{μελετώμενο διάστημα}$$

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση

$$x(t_0) = x_0 \quad , t_0 = a$$

Αυτή η εξίσωση Δεν είναι Γ.Δ.Ε.

Μέθοδος του Euler

- Επιλέγω διακριτό ανάλογο στην παράγωγο που γενικά είναι συνεχής

$$x'(t) \to \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\text{Όταν } h \to 0 \quad \eta \ (1) \to x'(t) \quad (1)$$

Άρα επιλέγεται η εξίσωση

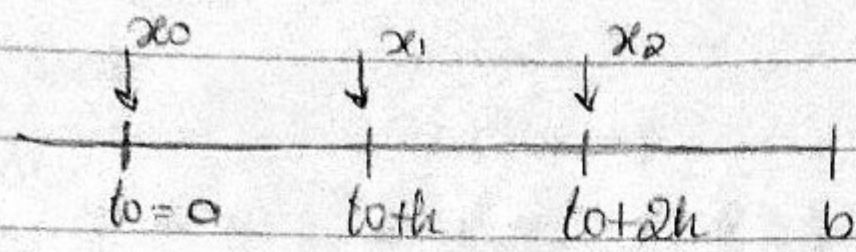
$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x(t))$$

ή

$$x(t+h) = x(t) + h f(t, x(t))$$

$$x_n = x(t_0 + nh) \quad , n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$x_n = x(t_0+nh) \quad , n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$



Θα χρειαζόμασταν όλα αυτά αν το διάστημα ήταν της μορφής $[a,+\infty)$

Άρα η εξίσωση γίνεται

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_0+nh, x_n) \quad (2) \quad n=0,1,2\dots$$

με

x_0: γνωστό.

Επομένως εδώ θα βρω την ακολουθία x_n

Προσοχή

Η λύση της (2) δεν είναι η λύση του αρχικού προβλήματος.

Με τη λύση της (2) θα πάρω σημεία αφού είναι ακολουθία οι οποίες όμως θα είναι πολύ κοντά στο γράφημα της

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

<u>Ειδική περίπτωση του παραπάνω προβλήματος</u>

$f(t,x) = x^2 \rightarrow$ αυτόνομη γιατί ∄ το t, δηλ ο χρόνος

$t_0=0 \quad , I=[0,+\infty)$

ιδια $x'(t) = x^2(t)$, $t \in J[0,+\infty)$

$x(0) = x_0$

γενικα σε εσενα ισχ ως x_0 θα ανηκει μονη

Προσοχή!

Το $x(t) = \frac{(x(t))^3}{3}$ δεν είναι λύση λύση

Είναι κάτι το οποίο αν το παραγωγίσω και ολοκληρώσω παίρνω το ίδιο

Αν χρειαστεί κάτι από διαφορικές θα δίνεται

Η λύση εδώ είναι: $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$

$x_{n+1} = x_n + h x_n^2$

Παράδειγμα

Πρόβλημα $3x+1$

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2}, & \text{αν } x_n \text{ είναι άρτιος} \\ \dfrac{3x_n+1}{2}, & \text{αν } x_n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Λύση

Το x_0 δίνεται και $x_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. όλα τα x_n που προκύπτουν από τον τύπο να είναι φυσικοί αριθμοί

Πχ. Για $x_0 = 23$ προκύπτει η εξής ακολουθία αριθμών

23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, ...

Άρα για όλα σημεία και μετά εξαφανίζεται η διαδοχή 2,1,2,1 κ.λπ. Αν διαταράξω και σε λίγο ότι υπάρχει η ένδειξη ότι ∀ το θα συμβαίνει αυτό

Άσκηση (Homework)

1) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Euler για να σχηματίσετε μια Εξίσωση Διαφορών, η οποία προσεγγίζει τη διαφορική εξίσωση.

Logistic: $x'(t) = \alpha x(t)(1-x(t))$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in I$

Κεφάλαιο 2ο

Μοντέλα Διαφορών

Ορισμός

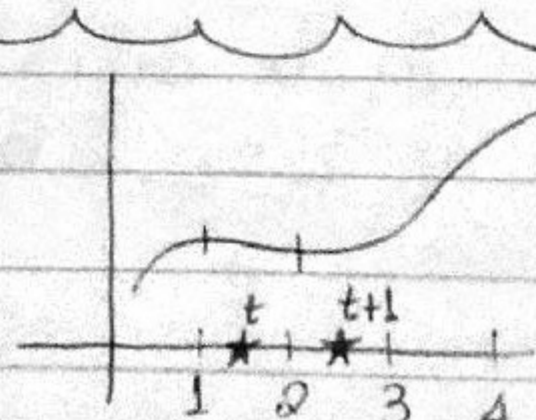
$y(t) \in \mathbb{R}$

Τελεστής Διαφοράς $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$

Τελεστής: Μια συνάρτηση ειδικής μορφής που δουλεύει πάνω σε άλλες συναρτήσεις όπου έχει πεδίο ορισμού μια συνάρτηση

Πχ

$\Delta t^2 = (t+1)^2 - t^2 = 2t+1$



Προηγούμενος κανόνας: Αυτός που είναι 1 μονάδα πίσω

Έστω 1, 2, 3, 4 ...

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Συμβολίζω $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

Έστω

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_{1\sqrt{e}} & x_{2\sqrt{e}} & x_{3\sqrt{e}} & x_{4\sqrt{e}} & x_{5\sqrt{e}} & x_{6\sqrt{e}} \end{array}$$

$$\boxed{x_v = \frac{1}{v}}$$

$$\boxed{x_t = \frac{\sqrt{e}}{t}}$$

Τελικά δεν παίζει ρόλο να αυξάνουν κατά μια μονάδα. Θέλαμε απλώς αποδείξαμε το σύνολο των δεικτών να είναι αριθμήσιμο.

$\Delta_t te^n = (t+1)e^n - te^n$ διαφορά ως προς t

$\Delta_n te^n = te^{n+1} - te^n$ διαφορά ως προς n

Έστω τώρα:

$\Delta^2 y(t) = \Delta(\Delta y(t)) \to$ Σύνθεση (Όχι Δύναμη)

$= \Delta y(t+1) - \Delta y(t) = \big(y(t+2) - y(t+1)\big) - \big(y(t-1) - y(t)\big)$

Παράδειγμα

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k) \quad \text{με} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Ορισμός

$Ey(t) = y(t)+1$

Τελεστής Μετατόπισης

$Iy(t) = y(t)$

Ταυτοτικός Τελεστής

Παρατήρηση

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$
$$= \mathcal{E}(t) - \mathcal{I}(t)$$

Δηλ.

$$\Delta = \mathcal{E} - \mathcal{I}$$

Έχουμε ότι:

$$\Delta^n y(t) = (\mathcal{E} - \mathcal{I})^n y(t)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\mathcal{I})^k \mathcal{E}^{n-k} y(t)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y(t+n-k) \rightarrow \text{Διωνυμικό Θεώρημα}$$

Επίσης: $\mathcal{E}^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} y(t)$

Θεώρημα (Να ξέρω τις ιδιότητες απ' έξω)

Απόδειξη Homework

a) $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$, $m, n \in \mathbb{N}$

b) $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$

c) $\Delta(c\, y(t)) = c\, \Delta y(t)$, c σταθερά

d) $\Delta(y(t) z(t)) = y(t) \Delta(z(t)) + \mathcal{E}(z(t)) \Delta(y(t))$

e) $\Delta\left(\frac{y(t)}{z(t)}\right) = \frac{z(t) \Delta(y(t)) - y(t) \Delta z(t)}{z(t) \mathcal{E}(z(t))}$

Απόδειξη

d) $\Delta(y(t) z(t)) = y(t+1) z(t+1) - y(t) z(t)$

$= y(t+1) z(t+1) - y(t) z(t+1) + y(t) z(t+1) -$

$- y(t) z(t) =$

$= \Delta y(t) \mathcal{E} z(t) + y(t) \Delta z(t)$

Θεώρημα (Να ξέρω τους τύπους απ' έξω)

a) $\Delta a^t = (a-1)a^t$ $\quad a$ σταθερά

b) $\Delta \sin(at) = 2\sin\frac{a}{2}\cos\left(a\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)$

c) $\Delta \cos(at) = -2\sin\frac{a}{2}\sin\left(a\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)$

d) $\Delta \log(at) = \log\left(1+\frac{1}{t}\right)$

e) $\Delta \log\Gamma(t) = \log t$

Απόδειξη

e) $\Delta \log\Gamma(t) = \log\Gamma(t+1) - \log\Gamma(t) =$

$= \log\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = \log t$

Προσοχή δεν χρησιμοποιώ την ιδιότητα $\Gamma(t+1) = t!$ γιατί αυτό ισχύει μόνο για φυσικούς

Ισχύει ότι
$\Delta a^{t+k} = (a-1)a^{t-k}$
k σταθερό

Παράδειγμα

Nb $\Delta\left(\dfrac{1}{\cos(\pi t)}\right) =$

Ορισμός
$\sec\theta = 1/\cos\theta$ $\quad$ υποτείνουσα / προσκείμενη

$= \dfrac{1}{\cos(\underbrace{\pi(t+1)}_{\pi t+\pi})} - \dfrac{1}{\cos(\pi t)} =$

$= \dfrac{1}{\cos(\pi t)\cdot\cos\pi - \sin(\pi t)\cdot\sin\pi} - \dfrac{1}{\cos(\pi t)}$

$= -2\,\dfrac{1}{\cos(\pi t)}$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$$

αντίστοιχα $\quad \Delta_t (t^n) = (t+1)^n - t^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(t^k - t^n\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k$$

Ορισμός

a) $t^{\underline{\tau}}$: φθίνουσα παραγοντική δύναμη

Δηλ. ξεκινάμε από το t και κατεβαίνουμε κατά τ.

• για $\tau \in \mathbb{N}$

$$t^{\underline{\tau}} = t(t-1)(t-2)\dots\left(\overset{t-(\tau-1)}{\overset{\shortparallel}{t-\tau-1}}\right)$$: πλήθος παραγόντων : τ

b) $t^{\underline{0}} = 1$

c) $t^{\underline{\tau}} = \dfrac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t-\tau)}$, αν $\tau = -1, -2, -3, \dots$.

δ) $t^{\underline{\tau}} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\tau+1)}$ αν $\tau \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Όλα αυτά με την προϋπόθεση οι παράγοντες που γράφουμε να έχουν νόημα

Πχ

$$(-2)^{\underline{-3}} = \frac{1}{(-2+1)(-2+2)\dots(-2+3)}$$: δεν ορίζεται γιατί υπάρχει διαίρεση με 0.

$$t^{\underline{r}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)} = \quad , r \in \mathbb{N}$$ → θα προσπαθήσω να φτιάξω την παράσταση του παρονομαστή στον αριθμητή

$$= \frac{t(t-1)\Gamma(t-1)}{\Gamma(t-r+1)} = \dots = \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)\cancel{\Gamma(t-r+1)}}{\cancel{\Gamma(t-r+1)}} = t(t-1)(t-2)\dots(t-r+1) \quad , t \in \mathbb{R}$$

Σημείωση: $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ Όμοια $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$

$\Gamma(t-1) = (t-2)\Gamma(t-2)$ κ.ο.κ.

Συνδυασμοί - Μεταθέσεις

Συνδυασμός: Δε με ενδιαφέρει η σειρά $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Μετάθεση: Με ενδιαφέρει η σειρά

Ισχύει: $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{\Gamma(k+1)}$, (πραγματικές μεταβλητές)

Ονομάζουμε το παραπάνω διωνυμικό συντελεστή.

Ιδιότητες: (1) $\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r}$: μας δείχνει την ύπαρξη συμμετρίας

(2) $\binom{t}{r} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1}$

(3) $\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1}$

Η απόδειξή τους γίνεται με τον τύπο $\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)}$

<u>Θεώρημα</u>: (a) $\Delta_t t^{\underline{r}} = r t^{\underline{r-1}}$

(b) $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$, $r \neq 0$

(c) $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$

<u>Απόδειξη</u> (a): $\Delta_t t^{\underline{r}} = (t+1)^{\underline{r}} - t^{\underline{r}} = \left[(t+1)(t)\cdots\left(\overbrace{(t+1)-r+1}^{t-r+2}\right)\right] -$

$- \left[t(t-1)\cdots(t-r+1) \right] =$

Αναζητώ κοινά πράγματα μέσα στην αγκύλη

$= t(t-1)\cdots(t-r+2)\left[(t+1)-(t-r+1)\right] = r t^{\underline{r-1}}$

Η παραπάνω απόδειξη είναι σωστό, αλλά για την εξειδικευμένη περίπτωση $r \in \mathbb{N}$.

Ακολουθεί η <u>γενική απόδειξη</u> για $r \in \mathbb{R}$

Τα γράφω συναρτήσει του $(t-1)$

(a) $\Delta_t t^{\underline{r}} = \Delta_t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} =$

$= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)\,(t-r+1)}{(t-r)\Gamma(t-r+2)} = r\,\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} = r t^{\underline{r-1}}$

(b) $\Delta_t \binom{t}{r} = \Delta_t \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{r t^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{1}{\frac{\Gamma(r+1)}{r t^{\underline{r-1}}}} =$

$= \frac{1}{\frac{\Gamma(r+1)}{r}}\, t^{\underline{r-1}} = \frac{t^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r)} = \binom{t}{r-1}$

$\hookrightarrow \Gamma(r)$

$\hookrightarrow \frac{1}{\Gamma(r+1)} \cdot \Delta_t t^{\underline{r}}$

$\boxed{\Gamma(1) = 0}$

επειδή το Δ είναι ως προς t.

<u>Παράδειγμα</u>: $\overbrace{y(t+2)-2y(t+1)+y(t)}^{\Delta^2 y(t)} = t(t-1)$: Να βρεθεί μια λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών. (Προσοχή δε θα βρω όλες τις λύσεις) Το ζητούμενο είναι να βρω <u>μια</u> λύση.

<u>Λύση</u>: $\Delta^2 y(t) = \Delta(\Delta y(t)) = \Delta(y(t+1)-y(t)) = [y((t+1)+1)-y(t+1)] -$
$- [y(t+1)-y(t)]$

Άρα τελικά $y(t+2)-2y(t+1)+y(t) = t(t-1) \Leftrightarrow \Delta^2 y(t) = \underbrace{t(t-1)}_{t^{\underline{2}}}$

Άρα πρέπει να βρω λύση για την εξίσωση

$$\Delta^2 y(t) = t^{\underline{2}}$$

$$\Delta_t t^{\underline{a}} = a t^{\underline{a-1}}$$

Παρατηρώ: $\Delta^2 t^{\underline{4}} = \Delta(4t^{\underline{3}}) = 4\Delta(t^{\underline{3}})$

$= 4\cdot 3\cdot t^{\underline{2}}$ άρα $\Delta^2\left(\frac{t^{\underline{4}}}{12}\right) = t^{\underline{2}} \rightsquigarrow$ Μια λύση της εξίσωσης

<u>Ορισμός</u>: Το <u>αόριστο άθροισμα</u> ή αντιδιαφορά της συνάρτησης $y(t)$, συμβολίζεται $\Sigma y(t)$, ορίζεται να είναι μια συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη σχέση,

$\Delta(\Sigma y(t)) = y(t)$, για <u>όλα</u> <u>τα t</u> στο π.ο. της y.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί το $\overset{\text{αόριστο άθροισμα}}{\Sigma 6^t}$

$\Delta(\Sigma 6^t) = 6^t$ (θέλω να βρω μια συνάρτηση που η διαφορά της να μου δίνει 6^t)

Παρατηρώ ότι $\Delta\left(\frac{6^t}{5}\right) = 6^t$.

$\Delta(6^t) = 6^{t+1} - 6^t = 6^t 6 - 6^t = 6^t(6-1)$
$= 6^t \cdot 5$

$$\Delta\left(\frac{6^t}{5} + c(t)\right) = \Delta\left(\frac{6^t}{5}\right) + \cancel{\Delta(c(t))}^{\,0}$$
$$= 6^t$$

$$\boxed{\Sigma 6^t = \frac{6^t}{5} + c(t)}$$

Ισχύει ότι όλα τα αόριστα αθροίσματα της 6^t, προκύπτουν από την παραπάνω σχέση...

<u>Θεώρημα</u>: Αν $z(t)$ είναι ένα αόριστο άθροισμα της $y(t)$, τότε όλα τα αόριστα αθροίσματα της $y(t)$, δίνονται απ' τον τύπο

$\Sigma y(t) = z(t) + C(t)$, όπου $\Delta(c(t)) = 0$, $c(t) \longrightarrow$ συνάρτηση με π.ο. ίδιο με την $y(t)$

Στα ολοκληρώματα έχουμε αυθαίρετη σταθερά, ενώ εδώ έχουμε αυθαίρετη συνάρτηση με $\Delta(c(t)) = 0$

$\Delta c(t) = 0$

- $t \in \mathbb{N}$

$\Delta c(t) = c(t+1) - c(t) = 0$

$c(t+1) = c(t)$. Παρατηρώ ότι για κάθε $t \in \mathbb{N}$ η $c(t)=0$ άρα μπορώ να γράψω $c(t) = c_1$

- $t \in \mathbb{R}$

$c(t+1) = c(t)$, $t \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Η συνάρτηση c είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=1$.

Θεώρημα: a : σταθερά, $\Delta(c(t)) = 0$, τότε ισχύουν

(a) $\Sigma a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + c(t)$, με $a \neq 1$

(b) $\Sigma \sin(at) = -\dfrac{\cos[a(t-1/2)]}{2\sin\frac{a}{2}} + c(t)$, με $a \neq 2n\pi$

(c) $\Sigma \cos(at) = \dfrac{\sin[a(t-1/2)]}{2\sin a/2} + c(t)$, με $a \neq 2n\pi$

(d) $\Sigma \log t = \log \Gamma(t) + c(t)$, $t>0$

(e) $\Sigma t^{\underline{a}} = \dfrac{t^{\underline{a+1}}}{a+1} + c(t)$

(f) $\Sigma \binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + c(t)$

(g) $\Sigma \binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + c(t)$

Απόδειξη

(b) $\Delta_t \cos\left[a\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] = -2\sin\frac{a}{2}\ \sin(at)$

$$\Rightarrow \Delta_t\left(\frac{1}{-2\sin\frac{a}{2}}\cos\left[a\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right]\right) = \sin(at)$$

Για το θεώρημα αυτό, ισχύουν ακριβώς τα ίδια, αν για t βάλω το $t+\kappa$, κ: σταθερός.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος που αποτελείται από την $y(t+2)-2y(t+1)+y(t)=t^2$, $t\in \mathbb{N}\cup\{0\}$, μαζί με τις συνθήκες $y(0)=-1$ και $y(1)=3$.

$\Delta^2 y(t) = t^2$ (από το προηγούμενο)

$\Delta(y(t)) = \frac{t^3}{3}+c_1$ άρα $y(t) = \frac{t^4}{12}+c_1 t + c_2$

Όμως $y(0)=-1 \Rightarrow c_2=-1$ και $y(1)=3 \Rightarrow \frac{1}{12}+c_1-1=3 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_1=\dots$

b) $\Delta_t \cos\left[a(t-1/2)\right]^* = -2\sin\frac{a}{2}\sin(at)$

$\rightarrow \Delta_t \left\{ \frac{1}{-2\sin(a/2)} \cdot \cos\left[a(t-1/2)\right] \right\} = \sin(at)$

*Η σχέση τα ξεκινάει από το cos και ξεχνάει και έτσι $\Delta(\sin t) = \cos t$

Παράδειγμα

Να λυθεί $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = t^2$ $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
μαζί με τις συνθήκες
$y(0) = -1$ και $y(1) = 3$

Λύση

Βρίσκουμε ενα από τους τα δηλώ τις σταθερές από τα ζητάει αρχικά

Άρα έχω
$$\Delta^2 y(t) = t^2$$

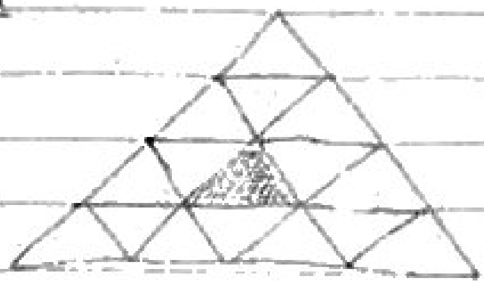
$$\Delta y(t) = \frac{1}{3} t^3 + c_1 \quad , c_1 \text{ σταθ.}$$

$$y(t) = \frac{1}{12} t^4 + c_1 t + c_2$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow \frac{1}{12} + c_1 - 1 = 3 \Rightarrow \boxed{c_1 = 47/12}$$

Παράδειγμα



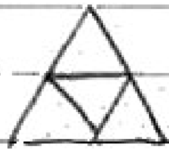
Ξεκινάμε από ένα μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο και την κάθε πλευρά του τη χωρίζουμε σε n ίσα τμήματα. Ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία αυτά των πλευρών και έτσι δημιουργούνται νέα μικρά τριγωνάκια. Από αυτά μας ενδιαφέρουν μόνο αυτά που βρίσκονται με βάση προς τα κάτω. Το ζητούμενο είναι να μετρήσουμε όλα τα τέτοια τρίγωνα που σχηματίζονται.

Λύση

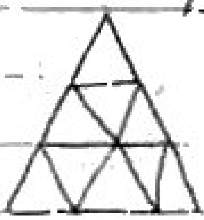
Έστω ν το πλήθος των μικρότερων πλευρών στις οποίες χωρίζουμε την κάθε πλευρά του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου και $y(\nu)$ το ζητούμενο πλήθος των τριγώνων που μας ενδιαφέρουν.

Έχουμε $y(1)=1$

$y(2)=4$



$y(3)=10$



Υποθέτουμε ότι χωρίζουμε την κάθε πλευρά σε $n+1$ τμήματα και δημιουργούμε τα αντίστοιχα τρίγωνα

$y(n+1) = y(n) + \alpha$

$\alpha = (n+1) + n + (n-1) + \dots + 1$

$y(n+1) = y(n) + [(n+1) + n + (n-1) + \dots + 1]$

27/3/17

Στο προηγούμενο πχ παίρνουμε την εξίσωση:

$$y(n+1) = y(n) + (n+1) + n + \dots + 2 + 1$$

η οποία είναι 1ης τάξης εξ. διαφορών.

$$\Rightarrow \Delta y(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}(n+2)^{2}$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{6}(n+2)^{\underline{3}} + c$$, το c δεν το θέλουμε

Έχουμε δυο κλασικές αρχικές συνθήκες

$$y(1) = 1$$

$$\frac{1}{6}(1+2)^{\underline{3}} + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

Άρα

τελικό

$$y(n) = \frac{1}{6}(n+2)^{\underline{3}}$$

με $(n+2)^{\underline{3}} = (n+2)(n+1)n$

Θεώρημα (Να τα ξέρω απ' έξω)

a) $\Sigma(y(t)+z(t)) = \Sigma(y(t)) + \Sigma(z(t))$

b) $\Sigma Dy(t) = D\Sigma y(t)$ $\quad D = $ σταθ

...λαγαν ...ε την
c) $\Sigma(y(t)\Delta z(t)) = y(t) - \Sigma E(z(t)) \cdot \Delta(y(t))$
d) $\Sigma(E(y(t))\Delta z(t)) = y(t)\cdot z(t) - \Sigma z(t)\Delta y(t)$

...λοκλήρωση κατά παράγοντες

Παράδειγμα

$a \neq 1$

$\Sigma \underset{y(t)}{t} \underset{\Delta z(t)}{a^t}$ Εφαρμόζοντας τον τύπο:

$$\Delta a^t = (a-1)a^t$$
$$\Rightarrow a^t = \frac{\Delta a^t}{a-1}$$

Άρα

$$\sum t \frac{1}{a-1} \Delta a^t = \frac{1}{a-1} \sum \underbrace{t}_{y(t)} \underbrace{\Delta a^t}_{z(t)} =$$

$$= \frac{1}{a-1} \Big(t\, a^t - \sum \underbrace{E}_{\text{Τελεστής Μετατόπισης}} a^t \cdot \underbrace{\Delta t}_{=1} \Big) = \frac{1}{a-1} \left(t a^t - \sum a^{t+1} \right)$$

Άρα

$$\sum a^{t+1} = \frac{a^t}{a-1}$$

Στο τελικό αποτέλεσμα προσθέτουμε $+ c(t)$, όπου $\Delta(c(t)) = 0$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\sum \underbrace{\binom{t}{2}}_{y(t)} \underbrace{\binom{t}{5}}_{\Delta z(t)}$$

<u>Λύση</u>

Εδώ θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω είτε το c είτε το d από το προηγούμενο θεώρημα. Λόγω ευκολίας θα επιλέξω το c

$$z(t) = \binom{t}{6}$$

$$\sum \binom{t}{2}\binom{t}{5} = \binom{t}{6}\binom{t}{2} - \underbrace{\left[\binom{t+1}{7}\binom{t}{1} - \overbrace{\sum\binom{t+2}{7}}^{\binom{t+2}{8}}\right]}_{\sum\binom{t+1}{6}\binom{t}{1}} + c(t)$$

όπου $\Delta c(t)=0$

ιε. b

- $\sum\limits_{k=a} y_k = 0$ αν $a>b$, κλασσικό άθροισμα

- για $n \geq m$, $n,m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n\left(\sum_{k=m}^{n-1} y_k\right) = y_n$$

Απόδειξη $\sum\limits_{k=m}^{(n-1)+1} y_k - \sum\limits_{k=m}^{n-1} y_k = y_n$

- για $n \leq p$, $n,p \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n\left(\sum_{k=n}^{p} y_k\right) = -y_n \quad \bigstar$$

- $\sum y_k = \sum\limits_{k=m}^{n-1} y_k + C$, $m \leq n$

- $\sum y_n = -\sum\limits_{k=n}^{p} y_k + D$, $p \geq n$

Η αξία αυτών είναι ότι μπορώ να υπολογίσω αόριστο άθροισμα μέσω του ορισμένου και αντίστροφα.

($\bigstar$) Απόδειξη

$$\sum_{k=n+1}^{p} y_k - \sum_{k=n}^{p} y_k = -y_n$$

Παραδειγμα

$n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \Sigma\left(\frac{2}{3}\right)^n + c = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}-1} + c$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + c$$

• Για $n=2$ έχουμε

$$-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + c = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{c=2}$$

Στο τέλος το c θα το υπολογίζαμε φαίνεται

Θεώρημα

Αν z_n είναι ένα αόριστο άθροισμα της y_n τότε

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_k = \left[z_k\right]_m^n = z_n - z_m$$

↳ αντίστοιχος τρόπος με τα ολοκληρώματα

$$z_n = \Sigma y_n$$

Παραδείγματα

$$\sum_{k=1} k^2$$

Λύση

$$k^{\underline{1}} = k$$
$$k^{\underline{2}} = k(k-1)$$
} Προσθέτω κατά μέλη.

$$k^2 = k^{\underline{1}} + k^{\underline{2}}$$

$$\Rightarrow \Sigma k^2 = \Sigma k^{\underline{1}} + \Sigma k^{\underline{2}}$$

Δε θέλει απόδειξη γιατί βγαίνει αμέσως

$$\Sigma k^2 = \frac{k^{\underline{2}}}{2} + \frac{k^{\underline{3}}}{3} + c$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} k^2 = \left[\Sigma k^2\right]_1^{\ell+1} = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6}$$

Επειδή έχουμε διαφορά στο τελικό αποτέλεσμα δε χρειάζεται να έχω $+c$.

Θεώρημα

$m<n$ i) $$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = \left[a_k b_k\right]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1} \quad , k,m,n \in$$

$y_k = y(k)$ $\quad z_k = z(k)$

Απόδειξη

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k-1} + C$$

Θέτουμε $n = m+1$

$$a_m \Delta b_m = a_{m+1} b_{m+1} - (\Delta a_m) b_{m+1} + C \quad (1)$$

Πάω στην (1) και βρίσκω το C

$$C = -a_m b_m$$

ii) $$\sum_{k=m}^{n-1} c_k d_k = d_n \sum_{k=m}^{n-1} c_k - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\sum_{i=m}^{k} c_i\right) \Delta d_k$$

Τύπος αθροίσεως του Abel

Homework

1) $\sum_{k=1}^{n-1} k\, 3^k$: Να υπολογιστεί

2) Ν.δ.ο. $\forall y(t)$: $\Delta E y(t) = E \Delta y(t)$

3) Να υπολογιστεί $\Delta^n t^3$ $\quad n = 1, 2, 3 \ldots$

4) Να υπολογιστεί $\Delta^n t^3$, $n=1,2,3,\dots$

5) Ισχύει $t^r \cdot t^s = t^{r+s}$? , $r,s \in \mathbb{R}$

29/5/17

Προσεγγιστική Λύση

$$\int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \log \frac{b}{a}$$

Για το $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ Δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος που να μας δίνει αποτέλεσμα

Ορισμός

$\{y_k(t)\}_k$: μια ακολουθία συναρτήσεων

π.χ. $f_n(t) = t^n$

α) $g(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t)\cdot x^k$, $\forall x \in$ σε ένα ανοικτό διάστημα γύρω από το 0

Τότε η συνάρτηση $g(t,x)$ καλείται γεννήτρια συνάρτηση.

β) $h(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y_k(t)x^k}{k!}$ (αν υπάρχει) σε ένα ανοικτό διάστημα γύρω από το 0

Τότε η συνάρτηση $h(x,t)$ καλείται εκθετική γεννήτρια συναρ

Επίσης ισχύουν τα ακόλουθα:

$$y_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k} g(t,0) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} h(t,0)$$

Οι $g(t,x)$ και $h(x,t)$ δεν είναι μοναδικές

Παράδειγμα

$y_k(t) = (f(t))^k$

γεωμετρική σειρά

$$g(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (f(t))^k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (f(t)\cdot x)^k = \frac{1}{1-f(t)\cdot x}$$

με $|f(t)\cdot x|<1$

Όταν δεν ισχύει $|f(t)\cdot x|<1$, τότε η σειρά απειρίζεται θετικά.

Παραγωγίζω ως προς x.

Συνάρτηση 2 μεταβλητών

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-f(t)\cdot x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(f(t))^k x^k\right)\Rightarrow$$

$$\frac{f(t)}{(1-f(t)\cdot x)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}(f(t))^k\, k\cdot x^{k-1}=$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k\,(f(t))^k\right)x^k$$: γεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός

Τα πολυώνυμα Bernoulli ορίζονται από τη σχέση

$$\frac{x e^{tx}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\boxed{\frac{B_k(t)}{k!}}\,x^k \quad (1)$$

→ εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τη xe^{tx}/e^x-1

και οι αριθμοί Bernoulli είναι τα πολυώνυμα Bernoulli υπολογισμένα στο 0.

Έστω πολυώνυμο Bernoulli $B_k(t)$ → τα $B_k(t)$ αποδεικνύουμε να είναι πολυώνυμα

$$(1)\Rightarrow e^{tx}=\frac{e^{x-1}}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^k$$

Γνωρίζουμε ότι $e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\dots$

$$\Rightarrow 1+tx+\frac{(tx)^2}{2!}+\frac{(tx)^3}{3!}+\dots=\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(B_0(t)+\frac{B_1(t)}{1!}x+\frac{B_2(t)}{2!}x^2+\dots\right)=$$

$$= B_0(t) + \left(\frac{B_1(t)}{1!} + \frac{B_0(t)}{2!} \right) x + \left(\frac{B_2(t)}{2!} + \frac{B_1(t)}{2!\,1!} + \frac{B_0(t)}{3!} \right.$$

Συνήθως δεν εξισώνουμε τα δύο μέλη μεταξύ τους γιατί το μέλος που εξαρτάται από το B_0 είναι σειρά άπειρη ενώ το άλλο πολυώνυμο. Παρόλα αυτά εδώ το δεχόμαστε

Εξισώνουμε

$B_0(t) = 1$

$B_1(t) = t - 1/2$

$B_2(t) = t^2 - t - 1/6$

Θεώρημα

(1) παράγωγος ως προς t.

Ο βαθμός του $B_n(t)$ είναι n

α) $B'_k(t) = k B_{k-1}(t)$, $k \geq 1$

β) $\Delta_t B_k(t) = k t^{k-1}$, $k \geq 0 \Rightarrow \sum t^k = \frac{1}{k+1} B_{k+1}(t) + c(t)$

γ) $B_k = B_k(0) = B_k(1)$, $k \neq 1$

δ) $B_{2m+1} = 0$, $m \geq 1$

Απόδειξη

α) $$\frac{x^2 e^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B'_k(t)}{k!} x^k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B'_k(t)}{k!} x^k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{k-1}(t)}{(k-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B'_k(t)}{k!} x^k$$

β) $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Delta_t B_k(t)}{k!} x^k = \frac{x}{e^x - 1} \left(e^{(t+1)x} - e^{tx} \right)$$

$$= x e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} x^k}{(k-1)!}$$

για $k=0$

το σταθερό είναι 0

Μόνο εξετάζω αν φαίνεται το μηδενικό.

Θεώρημα (Τύπος άθροισης του Euler)

Υπάρχει $y^{(2m)}(t)$, $t \in [1,n]$ είναι συνεχής για $m \geq 1$, n

τότε ο τύπος

$$\sum_{k=1}^{n} y(k) = \int_1^n y(t)\,dt + \frac{y(n)+y(1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{(2i)!} \cdot$$

$$\cdot \left(y^{(2i-1)}(n) - y^{(2i-1)}(1)\right) - \frac{1}{(2m)!}\int_1^n y^{(2m)}(t)\, B_{2m}(t - \lfloor t \rfloor)$$

όπου

$\lfloor x \rfloor$ ο μέγιστος μικρότερος ακέραιος

ΣΣ $[x]$ = ακέραιο μέρος

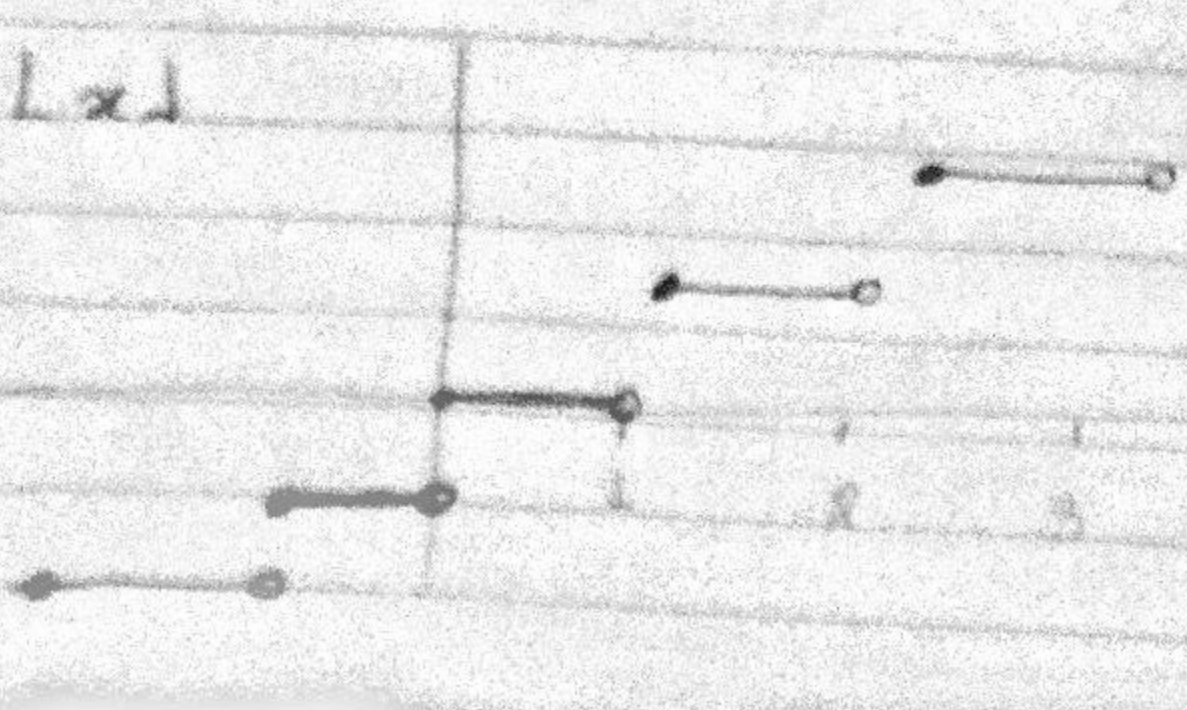
$\lceil x \rceil$ ο ελάχιστος μεγαλύτερος ακέραιος

Παράδειγμα

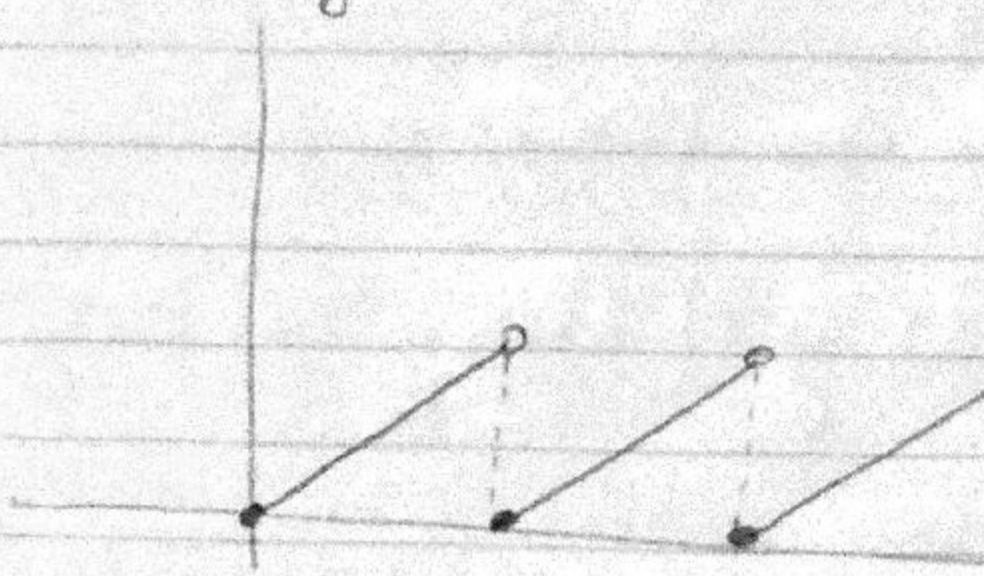
Να γίνει η γρ. παράσταση της $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

Λύση

Για την $\lfloor x \rfloor$



Άρα για την $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$



Παράδειγμα $\sum_{k=1}^{n} k^{1/2}$

Θέτουμε $y(t) = t^{1/2}$
$m = 1$

Άρα εφαρμόζοντας τον τύπο:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{1/2} = \int_1^n t^{1/2}\,dt + \frac{n^{1/2}+1}{2} + \frac{1}{24}\left(n^{-1/2}-1\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\int_1^n \left(-\frac{1}{4t^{3/2}}\right) B_2\left(t-\lfloor t \rfloor\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} n^{1/2} + \frac{1}{24} n^{-1/2} - \frac{5}{24} + \frac{1}{8}\int_1^n t^{-3/2} B_2(t \lfloor t \rfloor)$$

$B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ Βρίσκω γραφικά για το B_2
$x \in [0,1]$ μου δίνει κοντά στο 0.

$$-\frac{1}{12} \le B_2(x) \le \frac{1}{6}$$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών 1ης Τάξης

$\boxed{y(t+1) - p(t)\,y(t) = r(t)}$ με $p(t)$ δεν είναι η μηδενική

Δηλ. τουλάχιστον για 1 σημείο δεν ισούται με μηδενική τιμή

Είναι πρώτης τάξης γιατί τα $y(t)$ και $y(t+1)$ διαφέρουν

Αν $p(t)=1$ $\forall t$, τότε

$$y(t+1) - y(t) = r(t)$$

$$\Delta y(t) = r(t) \Rightarrow y(t) = \Sigma r(t) + c(t)$$

με $\Delta c(t$

$t = a,\ a+1,\ a+2, \ldots$

έχει βήμα 1

8/5/17

Συνέχεια από τα προηγούμενα...

1) Βρίσκω την ομογενή. $y(t+1) - p(t)\,y(t) = 0$

$$\Rightarrow y(t+1) = p(t)\,y(t) \qquad (*)'$$

$$y(a+1) = p(a)\,y(a)$$
$$y(a+2) = p(a+1)\,y(a+1) = p(a+1)\,p(a)\,y(a)$$
$$\vdots$$
$$y(a+n) = \dots = y(a) \prod_{k=0}^{n-1} p(a+k)$$

Άρα

$$y(t) = y(a) \prod_{s=a}^{t-1} p(s)$$

Έχουμε επίσης:

$$\boxed{\prod_{s=a}^{a-1} p(s) = 1} \rightarrow \text{Ορισμός}$$

2) Λύνω την μη ομογενή

$$u(t) = y(t)\cdot v(t)$$
$$\overbrace{y(t+1)}^{}\cdot v(t+1) - \overbrace{p(t)\,y(t)}^{y(t+1)}\cdot v(t) = r(t)$$

$$v(t) = \sum \frac{r(t)}{E\,y(t)} + C$$

Εδώ γράφω C και όχι C(t) για αυτό προσθέτω μια λάμδα σε κάθε απόδειξη βήμα, άρα μιλάμε για σταθ. και όχι για συνάρτηση

$$u(t) = y(t)\left[\sum \frac{r(t)}{E\,y(t)} + C\right] \rightarrow \text{Θεωρείται γνωστός. Δε θέλει απόδειξη}$$

Θεώρημα

$p(t) \neq 0 \quad \forall t \quad r(t)$: γνωστές συναρτήσεις

$t = a, a+1, a+2, \dots$

a) $u(t) = u(a) \prod_{s=a}^{t-1} p(s)$, $t = a, a+1, a+2, \dots$

b) $y(t) = u(t)\left[\sum \frac{r(t)}{Eu(t)} + c \right]$, για τη μη ομογεν

Παράδειγμα

$$y(t+1) - \underset{p}{\boxed{t}}\,(y(t)) = \underset{r}{\boxed{(t+1)!}} \qquad t \in \mathbb{N}$$

$$y(1) = 5$$

Να βρεθεί η λύση της.

Λύση

Η ομογενής είναι $u(t+1) - t\,u(t) = 0$

$$u(t) = u(1) \prod_{s=1}^{t-1} s$$

Στη θέση του $u(1)$ θα επιλέγαμε να βάζαμε την τι που μας βολεύει περισσότερο

Επιλέγω $u(1) = 1$

$u(t) = (t-1)!$

$$y(t) = (t-1)!\left(\sum \frac{(t+1)!}{t!} + c \right)$$

$$= (t-1)!\left(\sum (t+1) + c \right)$$

$$= (t-1)!\left(\frac{B_2(t+1)}{2} + c \right)$$

$$y(t) = \frac{(t+1)!}{2} + \underbrace{D}_{\left(c+\frac{1}{6}\right)}(t-1)!$$

$$\Rightarrow 5 = y(1) = \frac{(1+1)!}{2} + D\,(1-1)!$$

$$\Rightarrow 5 = 1 + D \Rightarrow \boxed{D = 4}$$

Παράδειγμα

Κατάθεση: 2.000€
Ετήσια απόδοση: 8% (δηλ. +8% κάθε χρόνο)
Μετά από t χρόνια πόσα χρήματα θα υπάρχουν?

Λύση

Έστω $y(t)$ το κέρδος στο τέλος της t χρονιάς

$$y(0) = 0$$

$$y(t+1) = y(t) + (y(t) + 2.000 \cdot 0{,}08)^{*}$$

$$y(t+1) = 1{,}08\, y(t) + 160$$

* στο τελικό πρέπει να προσθέσω τα 2.000€

$$y(t) = (1{,}08)^t \left(\sum \frac{160}{(1{,}08)^{t+1}} + c \right) =$$

$$= (1{,}08)^t \left(\frac{160}{1{,}08} \cdot \frac{(1/1{,}08)^t}{1/1{,}08 - 1} + c \right)$$

$$= -20.000 + c\,(1{,}08)^t$$

Έστω

$$y(t+1) - t\,y(t) = 1$$

$$y(1) = 1 - \underbrace{e}_{2{,}71}$$

$$y(8) = 1{,}28$$

Εδώ όμως με τη μέθοδο της αντικατάστασης χάνω δεκαδικά ψηφία από το 2,71 αλλάζει ενώ θα έπρεπε να βγει αρνητικό βγαίνει θετικό

Έστω $p_n(t)y(t+n)+\dots+p_0(t)y(t)=r(t)$
$p_n(t)\neq 0 \quad \forall t$
$p_0(t)\neq 0 \quad \forall t$

$$\left(P_n(t)F^n+\dots+P_0(t)F^0\right)y(t)=r(t) \quad (**) \quad \square$$

$$\Delta^3 y(t)+3\Delta^2 y(t)+\Delta y(t)-y(t)=r(t)$$

Μπορούμε να αποφασίσουμε αν είναι γραμμική?

Μπορώ να αντικαταστήσω τα $\Delta^k y(t)$ και να αποφασίσω.

Κάνοντας πράξεις: $y(t+3)-2y(t+1)=r(t)$
και έτσι μπορώ να βρω και άλλα συμπεράσματα $\square$

Θεώρημα

$p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), r(t)$ για $t=a, a+1, a+2, \dots$

$p_0(t)\neq 0 \quad \forall t$
$p_n(t)\neq 0 \quad \forall t$

Τότε για τυχόν $t_0=a, a+1, \dots$ και $\forall\, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ αριθμούς

$\exists$ ακριβώς μια συνάρτηση $y(t)$ η οποία να ικανοποιεί την εξίσωση $(**)$ και τις αρχικές συνθήκες

$$y(t_0+k)=y_k \quad , k=0,1,2\dots$$

Θεώρημα

α) Αν $u_1(t)$, $u_2(t)$ λύσεις της ομογενούς, τότε και η $Cu_1(t)+Du_2(t)$ (δηλ. γρ. συνδυασμός), είναι επίσης λύση; C, D σταθ.

β) Αν $u(t)$ είναι η λύση της ομογενούς και $y(t)$ είναι μια λύση της (**)

γ) Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι λύσεις της μη ομογενούς (**), τότε $y_1(t)-y_2(t)$ είναι λύση της ομογενούς

Ορισμός 15/6/17

Έστω $\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$

ορισμένες στο $\{a, a+1, a+2, \dots\}$ άπειρα αριθμοί

Θα λέγονται γρ. εξαρτ. αν $\exists$ σταθερές

$c_1, c_2, \dots, c_m$ όχι όλες 0

τ.ω.:

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_m u_m(t) = 0 \quad \forall t \in \{a, a\dots$$

Αν δεν είναι γρ. εξαρτημένες, λέμε ότι είναι γρ. ανεξάρτητες.

Παραδείγματα

1) $2^t, \ t2^t, \ t^2 2^t$ ορισμένες στο $\{a, a+1, \dots\}$

Είναι γρ. εξαρτημένες?

Λύση

$$c_1 2^t + c_2 t 2^t + c_3 t^2 2^t = 0, \quad \forall t \in \{a, a+1, \dots$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (2)$$

γιατί θέλω άπειρες λύσεις για την (1) εφόσον θέλω να ικανοποιείται $\forall t \in \{a, a+1, \dots$
Όμως επειδή είναι δευτεροβάθμια στο $\mathbb{C}$ έχει το πολύ 2 ρίζες.
Άρα για να έχει άπειρες πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει η (2)

Άρα είναι γρ. ανεξάρτητες.

2) $u_1(t) = 2$

$u_2(t) = 1 + \cos(\pi t)$

$\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

Είναι γρ. εξαρτημένα?

Λύση

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = 0$$
$$\Rightarrow c_1 \cdot 2 + c_2 (1 + \cos(\pi t)) = 0$$

Το θέμα εδώ είναι ότι τα c_1 και c_2 θέλω να μου ικανοποιεί όλες τις περιπτώσεις.
Δεν υπάρχει κάποιο τέτοιο.
Άρα είναι γρ. ανεξ.

3) Στο προηγούμενο π.χ. τώρα θα πάρω ως σύνολο το $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$

Άρα $$c_1 \cdot 2 + c_2 (1 + \underbrace{\cos(\pi t)}_{\forall t \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\} \text{ το } \cos(\pi t) = 0}) = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 1 = 0$$

Εδώ δεν έχω t, οπότε και να μη το πάρω υπόψιν δε με νοιάζει.

Άρα
ικανοποιείται για $c_1 = 1$
και $c_2 = -2$

Άρα
είναι γρ. εξαρτημένες.

Ορισμός (Casorati)

$$W(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1(t+1) & u_2(t+1) & \dots & u_n(t+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1(t+n-1) & u_2(t+n-1) & & u_n(t+n-1) \end{bmatrix}$$

$w(t) = \det W(t)$ ονομάζεται ορίζουσα του Casorati

Έχουμε

$$w(t) = \det \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ \Delta u_1(t) & \Delta u_2(t) & \cdots & \Delta u_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^{n-1} u_1(t) & \Delta^{n-1} u_2(t) & \cdots & \Delta^{n-1} u_n(t) \end{bmatrix}$$

Θεώρημα

Αν είναι οι $u_1, u_2, \dots u_n$ λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$p_n(t)\, u(t+n) + \dots + p_0(t)\, u(t) = 0 \quad (1)$$

για $t \in \{a, a+1, a+2, \dots\}$

Τότε

τα ακόλουθα 3 είναι ισοδύναμα:

1) Οι $u_1, \dots u_n$ είναι γρ. εξαρτημένες
2) $w(t) = 0$ για κάποιο συγκεκριμένο t.
3) $w(t) = 0$ για $\forall t$.

Εδώ ακόμα ισχύει η ιδιότητα από την ορίζουσα Wronsky: ότι αν μηδενίζεται για ένα t, μηδενίζεται και $\forall t$.

Θεώρημα

Αν $u_1(t), u_2(t), \dots u_n(t)$ είναι γρ. ανεξ. λύσεις της (1) τότε

η γενική της λύση θα είναι

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

με $c_1, c_2, \dots c_n$ να είναι σταθερές.

Όσα αναφέραμε για την Casorati αναφέρονται στην ομογενή εξίσωση διαφορών.

Παράδειγμα

$$u(t+3) - 6u(t+2) + 11u(t+1) - 6u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

και

έστω λύσεις οι $u_1(t) = 2^t$, $u_2(t) = 3^t$, $u_3(t) = 1$ } δίνεται

Να ελεγχθεί αν είναι γρ. εξαρτημένες.

Λύση

$$w(t) = \det\begin{bmatrix} 2^t & 3^t & 1 \\ 2^t & 2\cdot 3^t & 0 \\ 2^t & 4\cdot 3^t & 0 \end{bmatrix} = 2^{t+1}3^t \neq 0$$

Άρα

είναι γρ. ανεξ.

Άρα η γενική λύση θα είναι:

$$u(t) = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot 3^t + c_3$$

Έστω

$$u(t+n) + p_{n-1}u(t+n-1) + \dots + p_0(u(t)) = 0$$

$p_0 \neq 0$, p_i: σταθερές

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_0 = 0$$ χαρακτηρ. πολ/μο.

έχει χαρακτηριστικές ρίζες

$$(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + \dots + p_0)u(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(E-\lambda_k\right)^{\alpha_k} u(t)=0$$

α_k → αντιστοιχούν στην αλγεβρική πολλαπλότητα $\}\ \alpha_1+\ldots+\alpha_k=\nu$

↳ ρίζες του χαρ. πολυωνύμου $\square$

Έστω
$$\left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1} u(t)=0$$

Αν $\alpha_1=1$
$$u(t+1)=\lambda_1 u(t)$$

$\alpha_1>1$
$$u(t)=\lambda_1^t v(t)$$
$v(t)$ → δεν ουσία γράφω αυτό.

$$\boxed{\left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1}} \lambda_1^t v(t) \quad (1)$$

Η διαδικασία αντιστοιχεί λόγω στο ιράσιμο φίλω νιο.

$$\sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}\left(-\lambda_1\right)^{\alpha_1-i} E^i \lambda_1^t v(t)=$$

$$\sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}\left(-\lambda_1\right)^{\alpha_1-i} \lambda_1^{t+i} E^i v(t)=$$

$$=\lambda_1^{\alpha_1+t}\sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-1)^{\alpha_1-i} E^i v(t)=$$

$$=\lambda_1^{\alpha_1+t}(E-1)^{\alpha_1} v(t)=$$

$$=\lambda_1^{\alpha_1+t}\Delta^{\alpha_1} v(t)=0, \quad \text{για } v(t)=1, t, t^2, \ldots, t^{\alpha_1-1}$$

Άρα βασικές λύσεις: $\lambda_1^t, t\lambda_1^t, \ldots, t^{\alpha_1-1}\lambda_1^t$ και είναι γρ. ανεξ.

Θεωρία

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ με πολλαπλότητες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.
Τότε η (1) έχει τις ακόλουθες γρ. λύσεις:

$\lambda_1^t, t\lambda_1^t, \dots t^{a_1-1}\lambda_1^t$

$\lambda_2^t, t\lambda_2^t, \dots, t^{a_2-1}\lambda_2^t$

$\vdots$

$\lambda_k^t, t\lambda_k^t, \dots t^{a_k-1}\lambda_k^t$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξ. διαφορών:

$$u(t+3) - 7u(t+2) + 16u(t+1) - 12u(t) = 0 \quad \text{για } t=0,$$

Λύση

- $3^{\underline{ης}}$ τάξης
- γραμμική
- σταθ. συντελεστές

$\}$ Μπορώ να δουλέψω με χαρ. πολυωνυμο

Άρα

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0$$

$$(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$$ → μπορεί να έχει και μιγαδικές λ

$\lambda_1 = 2$, $a_1 = 2$

$\lambda_2 = 3$, $a_2 = 1$

Άρα βασικό σύνολο λύσεων είναι: $2^t, t\cdot 2^t, 3^t$

και αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Αν μας ζητηθεί να τα αποδείξουμε, χρησιμοποιούμε ορίζουσα Casorati.

$$w(t) = \det \begin{bmatrix} 2^t & t2^t & 3^t \\ 2^{t+1} & (t+1)2^{t+1} & 3^{t+1} \\ 2^{t+2} & (t+2)2^{t+2} & 3^{t+2} \end{bmatrix} = \dots = 3^t$$

↳ κοινός παρ. 2^t ↳ κοινός παρ. 2^t ↳ κοινός παρ. 3^t

Άρα η γενική λύση θα είναι

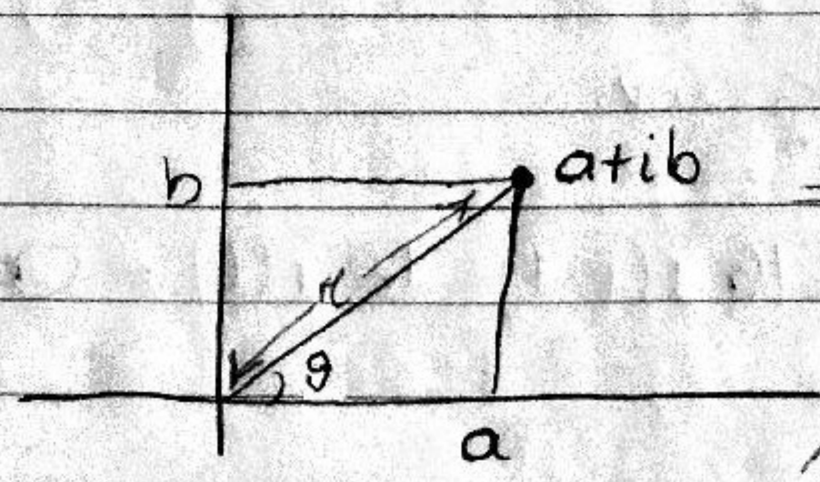
$$c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t + c_3 \cdot t \cdot 3^t$$

22/5/17

• Τι γίνεται στην περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει και μιγαδικές ρίζες?

$$\lambda = a + ib$$

$$\lambda = re^{i\theta} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$$ μιγαδικές συζυγείς



$\Rightarrow r^2 = a^2 + b^2$

$\tan\theta = b/a$

$$\lambda^t = r^t e^{\pm i\theta t} = r^t(\cos(t\theta) + i s$$

Όταν έχω μια μιγαδική ρίζα $z = x + yi$, τότε το x και το y είναι ρίζες της εξίσωσης και λύσεις γρ. ανεξ. μεταξύ τους

Παράδειγμα

$$u(t+2) - 2u(t+1) + 4u(t) = 0$$

Να οι λύσεις:

Λύση

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\theta = \mathrm{Arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Τότε

$$u_1(t) = 2^t \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$u_2(t) = 2^t \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Εδώ η ορίζουσα Casoratti βγαίνει $w(t) = \sqrt{3}\cdot 4^t \neq 0$

σταθερές

Έστω $y(t+n)+p_{n-1}\,y(t+n-1)+\dots+p_0 y(t)=r(t)$ (*)

• Μέθοδος της Εξάντλησης

Θεώρημα

$y(t)$: λύση της (*)

$$\underline{(E^n+p_{n-1}E^{n-1}+\dots+p_0)y(t)}=r(t)$$

Η $r(t)$ είναι λύση της

$$(E^m+q_{m-1}\,E^{m-1}+\dots+q_0)\,r(t)=0$$

Τότε

η $y(t)$ είναι λύση της $(E^m+\dots+q_0)\underbrace{(E^n+\dots+p_0)y(t)}_{r(t)}=0$

Παράδειγμα

Έστω $y(t+2)+7y(t+1)+6y(t)=t$. (*)

Να οι λύσεις της:

Λύση

$$E^2-7E+6=\underbrace{t}_{r(t)}$$

$$(E-1)(E-6)\,y(t)=t \quad (1)$$

$$(E-1)^2 t=\Delta^2 t=0 \quad (2)$$

είναι η τάξη 2 της εξίσωσης

μπο εδώ στο τετράγωνο δεν δίνει 0, τότε πάμε στον κύβο κ.ο.κ.

Πολλαπλασιάζω την (1) με το $(E-1)^2$ της (2)

$$\Rightarrow (E-1)^3(E-6)\,y(t)=(E-1)^2 t=0$$

Τα ίδια θα μπορούσαμε να κάνουμε και με το $(E-6)$

Όπως περνάμε από μια μη ομογενή σε μια ομογενή

Για το $(E-1)^2$

↳ το 1 είναι ο ταυτοτικός τελεστής

άρα

$$(E-1)^2 t = (Et)-(It) = (t+1)-(t) = 1$$

Τελικά λύνοντας έχουμε:

$$y(t) = c_1 6^t + c_2 + c_3 t + c_4 t^2$$

Βάζω αυτή στην αρχική σχέση (★):

$$c_3(t+2) + c_4(t+2)^2 - 7c_3(t+1) - 7c_4(t+1)^2 + 6c_3 + 6c_4 t^2 = t$$

$$t^2\left(c_4 - 7c_4 + 6c_4\right) + t\left(4c_4 + c_3 - 14c_4 - 7c_3 + 6c_3\right) +$$

$$\left(4c_4 + 2c_3 - 7c_4 - 7c_3\right) = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_4 = -1/10 \\ c_3 = 3/10 \end{cases} \Rightarrow c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα $y(t) = c_1 \cdot 6^t + c_2 + 3/10\, t - 1/10\, t^2$

Παράδειγμα

$$\Delta y(t) = 3^t \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right), \quad t \in \{0, 1, \dots\}$$

Να λυθεί.

Λύση

Το κομμάτι αυτό με παραδείγματα σε μιγαδικούς

Άρα $r=3$

$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

$\lambda = 3e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm 3i$

$(E-3i)(E+3i)\,y(t) = 0$

$(E^2+9)\cdot y(t) = 0$ → Στόχος είναι να έχω μηδενισμό λόγω εφαρμογής του E.

$(E^2+9)(E-1)\,y(t) = (E^2+9)\;3^t\sin(\frac{\pi}{2}t)$

Λύνοντας...

$$y(t) = c_1 + c_2\cdot 3^t\sin(\tfrac{\pi}{2}t) + c_3\cdot 3^t\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$c_2\cancel{3^t}\left(3\cos(\tfrac{\pi}{2}t) - \sin(\tfrac{\pi}{2}t)\right) + c_3\cancel{3^t}\left(-3\sin(\tfrac{\pi}{2}t) - \cos(\tfrac{\pi}{2}t)\right)$$

$$= \cancel{3^t}\sin(\tfrac{\pi}{2}t)$$

Από εδώ θα βγάλω σύστημα c_2 και c_3, δεν θα είναι αυτά ανεξάρτητα $\forall t$.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$y(t) = c_1 - \frac{3^t}{10}\left(\sin(\tfrac{\pi}{2}t) + 3\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\right)$$

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών

$$\left.\begin{array}{ll} (\star_1) & L(E)y(t) + M(E)z(t) = r(t) \\ (\star_2) & P(E)y(t) + Q(E)z(t) = s(t) \end{array}\right\}$$

L, M, P, Q πολυώνυμα

$r(t), s(t)$ γνωστά

$y(t), z(t)$ άγνωστα

Πολλαπλασιάζω την $(\star_1)$ με $Q(E)$

$$Q(E)\cdot L(E)\, y(t) + Q(E)\, M(E)\cdot z(t) = Q(E)\cdot r\ldots$$

... και την $(\star_2)$ με το $M(E)$

$$M(E)P(E)y(t) + M(E)\cdot Q(E) z(t) = M(E)\cdot s(t)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη...

$$\Rightarrow y(t)\big(Q(E)\, L(E) - M(E)\cdot P(E)\big) = Q(E)\cdot r(t) - M\ldots$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y(t+2) - 3y(t) + z(t+1) - z(t) = 5^t & (\star_1) \\ y(t+1) - 3y(t) + z(t+1) - 3z(t) = 2\cdot 5^t & (\star_2) \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$(\star_1) : (E^2-3)\, y(t) + (E-1)\, y(t)\, z(t) = 5^t$$
$$(\star_2) : (E-3)\, y(t) + (E-3)\, y(t)\cdot z(t) = 2\cdot 5^t$$

$$\big[(E-3)(E^2-3) - (E-1)(E-3)\big]\, y(t) = (E-3)5^t - (E-1)\cdot 2\cdot\ldots$$

$$\Rightarrow (E-3)(E-2)(E+1)\, y(t) = -6\cdot 5^t$$

$$\Rightarrow y(t) = c\cdot 5^t, \quad c = -1/6$$

λύση της ολογενούς

Λύση της μη ολογενούς:

$$y(t) = c_1\cdot 3^t + c_2\cdot 2^t + c_3(-1) - \frac{5^t}{6}$$

$$(E-3)\, z(t) = c_2 2^t + 4c_3(-1)^t + 7/3\, 5^t$$

$$z(t) = c_4 + 3^t + c_2 2^t - c_3(-1)^t + 7/6\, 5^t$$

Εξισώνοντας ...

$$c_4 = -3c_1$$

Άρα γράφω τελικά τα $y(t)$ και $z(t)$.

Σε όλα αυτά απαιτείται οι συντελεστές να είναι σταθερές.

<u>Μέθοδος Μεταβολής Παραμέτρων:</u>

Όμως είναι πιο πιθανό να δούμε κάτι της μορφής:

$$\begin{cases} p_n(t)\, y(t+n) + \ldots + p_0(t)\, y(t) = r(t) & (*3) \\ p_n(t)\, y(t+n) + \ldots + p_0(t)\, y(t) = 0 & (*4) \end{cases}$$

Τότε:

$$p_2(t)\, y(t+2) + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t)\, y(t) = r(t) \quad (*3')$$

$$p_2(t)\, y(t+2) + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t) \cdot y(t) = 0 \quad (*4')$$

29/5/17

Συνέχεια στην Μέθοδο Μεταβολής των Παραμέτρων

$\boxed{\text{για } n=2}$

$$y(t) = a_1(t)\,u_1(t) + a_2(t)\,u_2(t)$$

$u_1(t)$, $u_2(t)$ λύσεις της (3*)
↳ της ομογενούς

$$y(t+1) = a_1(t)\,u_1(t+1) + a_2(t)\,u_2(t+1) + \Delta a_1(t)\,u_1(t+1) + \Delta a_2(t)\,u_2(t+2)$$

Αν το κύκλο κάνει ίσο 0, τότε θα έχουμε απλοποιήσει πολύ την εξίσωση.

Για αυτό: $\Delta a_1(t)\,u_1(t+1) + \Delta a_2(t)\,u_2(t+1) = 0$ (5)

$$y(t+2) = a_1(t)\big(P_2(t)\,u_1(t+2) + P_1(t)\,u_2(t+1) + P_0(t)\,u_2(t)\big) + P_2(t)\big(u_1(t+2)\,\Delta a_1(t) + u_2(t+2)\,\Delta a_2(t)\big)$$

Όποτε θα έχουμε:

$$P_2(t)\,y(t+2) + P_1(t)\,y(t+1) + P_0(t)\,y(t) =$$

$$= a_2(t)\big(P_2(t)\,u_2(t+2) + \cancelto{0}{P_1\,u(t)\,u_2(t+1)} + P_0(t)\,u_1(t)\big)$$

$$+ a_2(t)\big(P_2(t)\,u_2(t+2) + \cancelto{0}{P_1(t)\,u_2(t+1)} + p_0(t)\,u_2(t)\big) +$$

$$+ p_2(t)\big[u_1(t+2)\cdot\Delta a_1(t) + u_2(t+2)\cdot\Delta a_2(t)\big]$$

γιατί τα u_i είναι λύσεις της ομογενούς

$$u_1(t+2)\,\Delta a_1(t) + u_2(t+2)\,\Delta a_2(t) = \frac{r_2(t)}{p_2(t)}$$

Στην (5) οι άγνωστοι είναι οι Δa_1 και Δa_2

Προσοχή
Δεν εφαρμόζω χαρακτηριστικό πολυώνυμο εδώ γιατί δεν έχω σταθ. συντελεστές

Θέλω ν.δ. $\perp a_1$ και $\perp a_2$ (ασυσχέτιστες) αρκεί να ικανοποιούν την (5)

Θεώρημα
Έστω $u_1(t), u_2(t), \dots u_n(t)$ είναι γρ. ανεξ. λύσεις της (3*). Τότε η
$$y(t) = a_1(t)u_1(t) + \dots + a_n(t)u_n(t)$$
είναι μια λύση της (3*) εάν τα $a_1, a_2, \dots a_n$ ικανοποιούν την εξίσωση:
$$U(t+1) = \begin{bmatrix} \Delta a_1(t) \\ \vdots \\ \Delta a_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots 0 \\ r(t)/p_n(t) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα
$$y(t+2) - 7y(t+1) + 6y(t) = t$$
$$u_1(t) = 1$$
$$u_2(t) = 6^t$$
Να λυθεί με μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

Λύση
$$a_1(t)u_1(t) + a_2(t)u_2(t)$$

$$\Delta a_1(t) + 6^{t+1}\,\Delta a_2(t) = 0$$

$$\Delta a_2(t) + 6^{t+2}\,\Delta a_2(t) = t$$

$$\Delta a_1(t) = -\frac{t}{5}$$

$$\Delta a_2(t) = \frac{t}{30}\,6^{-t}$$

$$a_1(t) = \Sigma\left(-t/5\right) + C = -\frac{t^2}{10} + C = -\frac{(t-1)t}{10} + C$$

$$a_2(t) = -\frac{t}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^t - \frac{1}{125}\left(\frac{1}{6}\right)^t + D.$$